11 Geometri

11.1 Sirkel, ellipse,hyperbel, parabel

> *restart* :

Maple har en egen programpakke for geometri. Den kalles opp med

> *with*(*geometry*) :

Her skal vi bruke noen av kommandoene i denne pakken, men også kommandoer i programpakken plottools.[

Sirkel

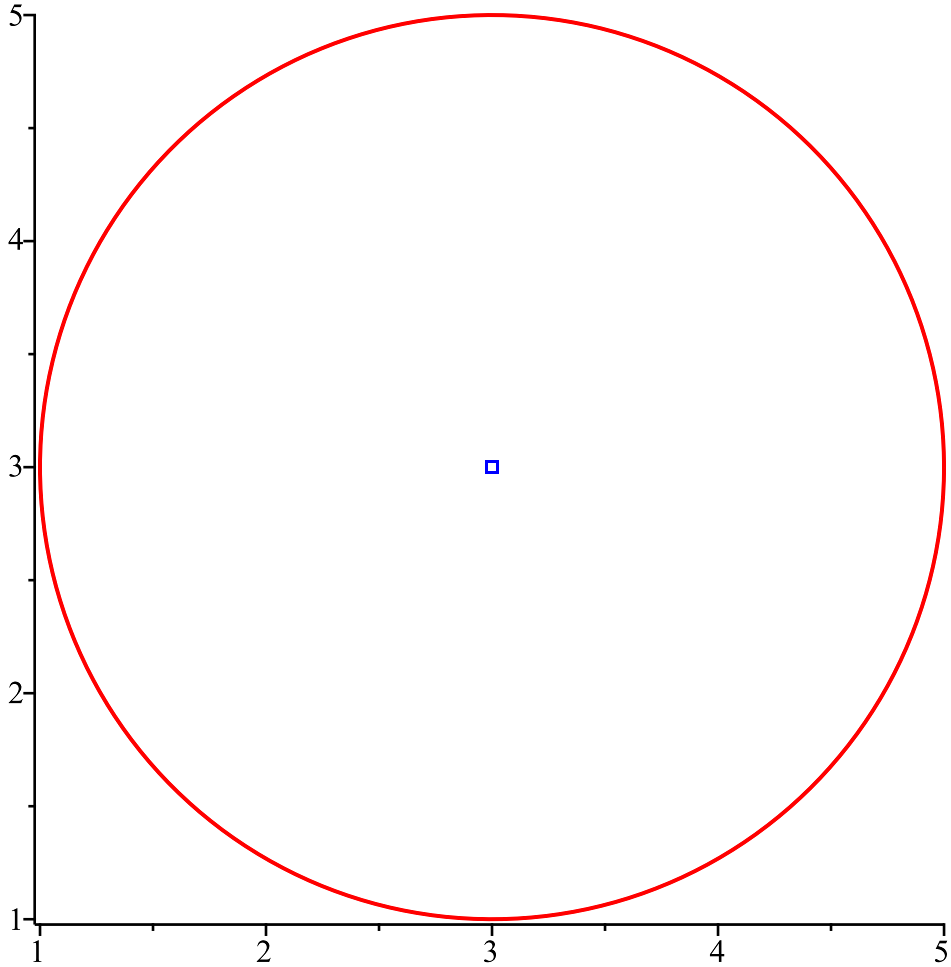
En sirkel er det geometriske stedet for alle punkter som ligger i en avstand *r* fra et gitt punkt.

- circle([*m*, *n*],*r*) fremstiller en sirkel med sentrum i [*m*, *n*] og radius *r*.

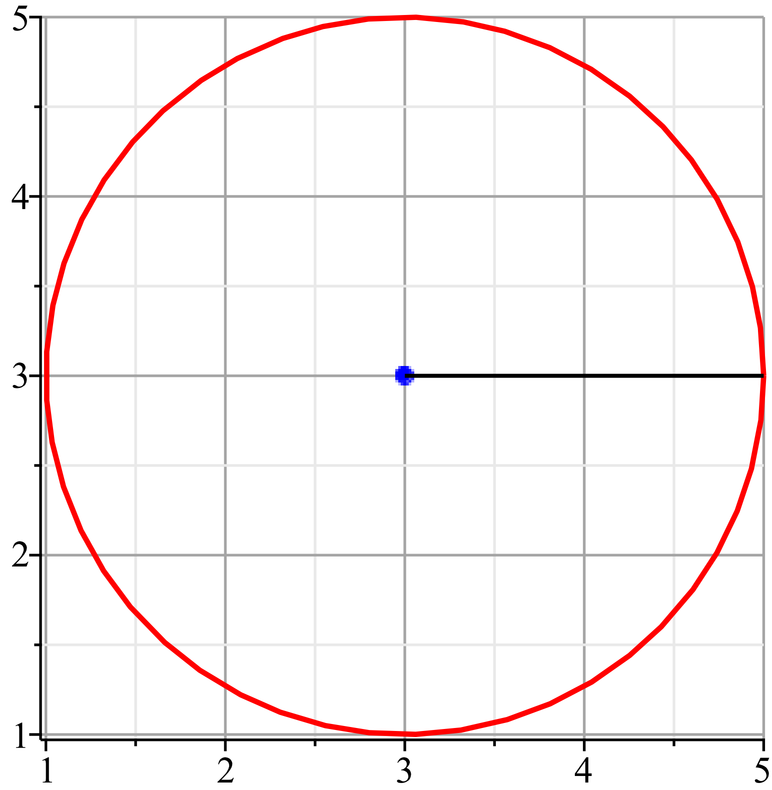
- Sirkel i vgs-pakken

> *sirkel* := *plottools*:-*circle*([3, 3], 2, *color* = *red*) :
sentrum := *plot*([[3, 3]], *color* = *blue*, *style* = *point*, *symbol* = *box*) :

> *display*(*sirkel*, *sentrum*, *scaling* = *constrained*)



> *Sirkel*([3, 3], 2)



$$(y-3)^2+(x-3)^2=4$$
$$Radius = 2.$$
$$Sentrum = [3., 3.]$$
$$Areal = 12.6$$

>

Ellipse

En ellipse er en kurve som består av punkter (x, y) som ligger slik at summen av avstandene til to gitte punkter (brennpunktene) konstant.

- ellipse(E, $[\,foci = [F_1, F_2], distance = sum\,], [x, y]$) definerer ellipsen E der F_1 og F_2 er brennpunktene og *sum* er summen av brennpunktradiene . P er et punkt på ellipsen. x og y er navnene på koordinataksene

  ellipse(E, *ligning*, $[x, y]$) definerer ellipsen E ved hjelp av *ligning*

  draw (E) plotter ellipsen E

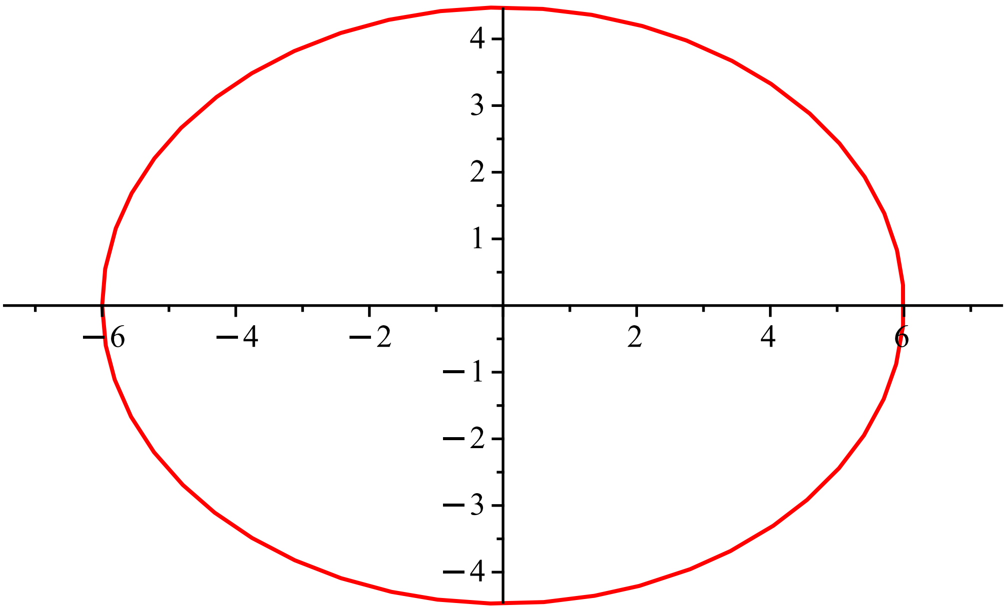
  point(A,m,n) definerer punktet A med x-koordinat m og y-koordinat n

- Ellipse i vgs-pakken

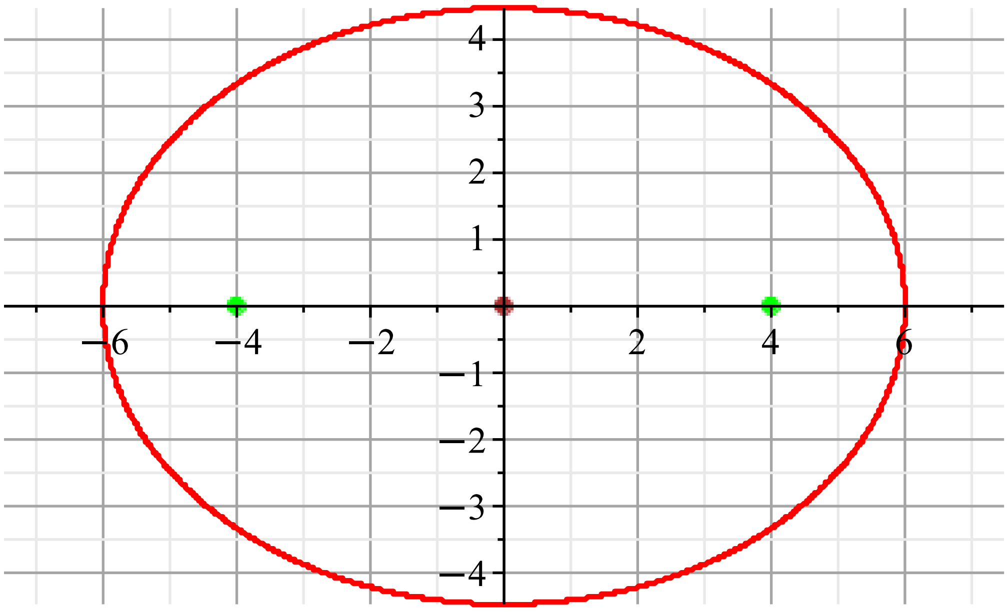
```
> point(F1, -4, 0) : point(F2, 4, 0) :
> ellipse(E, [foci = [F1, F2], distance = 12], [x, y])
```

$$E$$

```
> draw(E, axes = normal)
```



> $Ellipse([-4, 0], [4, 0], a = 6)$



$$0.0278\,x^2 + 0.0500\,y^2 = 1.$$
$$a = 6.,\ \ b = 4.47,\ e = 0.667$$
$$Brennpunkter\!: F_1 = [-4., 0.],\ F_2 = [4., 0.]$$
$$Sentrum\ =\ [0., 0.],\ \ Areal = 84.30$$
$$Styrelinjer\!: x_2 = 9.00,\ x_1 = -9.00$$

\>

Hyperbel

En hyperbel er en kurve som består av punkter (x, y) som ligger slik at absoluttverdien av differensen mellom brennpunktradiene er konstant.

- hyperbola(H, [$foci$= [F_1, F_2] ,$distancev$= 2a], [x, y]) definerer hyperbelen H der F_1, F_2 er brennpunktene og 2a er hyperbelens reelle akse eller avstanden mellom toppunktene. x, y er navnene på koordinataksene

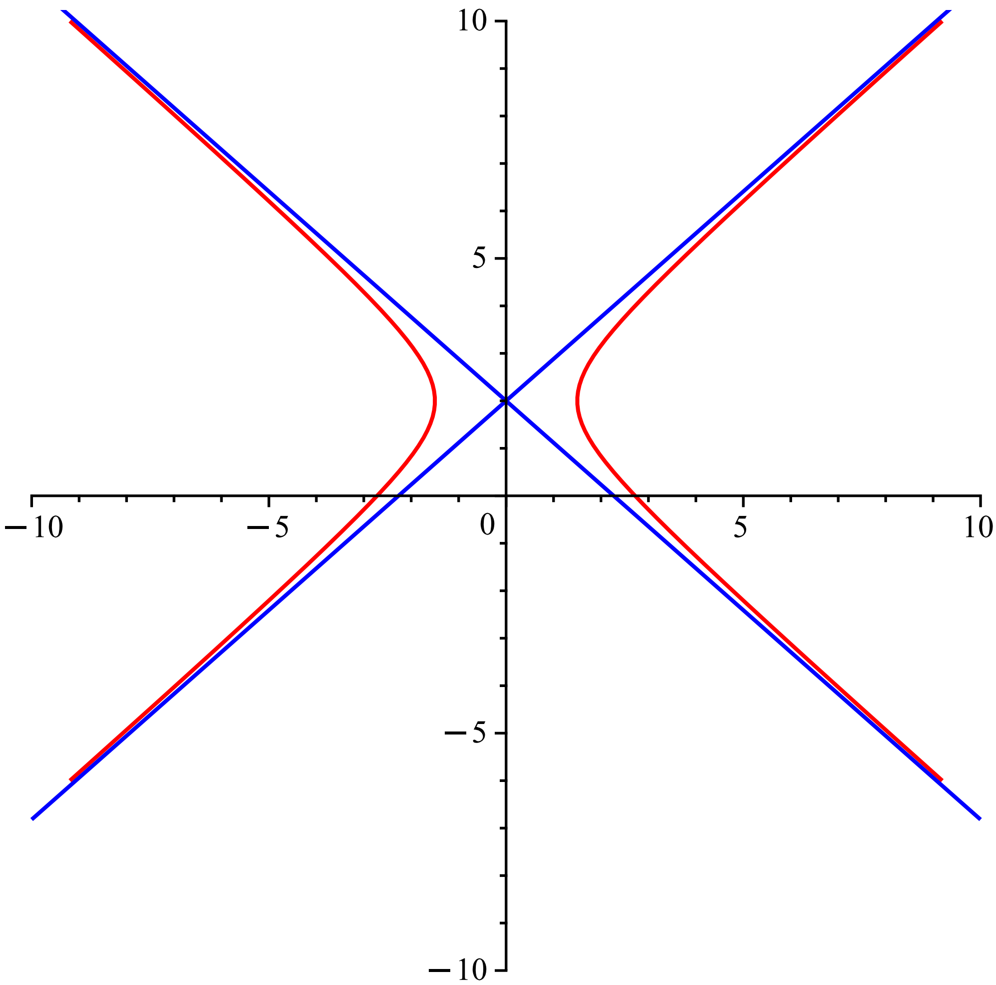
  hyperbola(H, ligning, [x, y]) definerer hyperbelen H ved hjelp av *ligning*

- Hyperbel i vgs-pakken

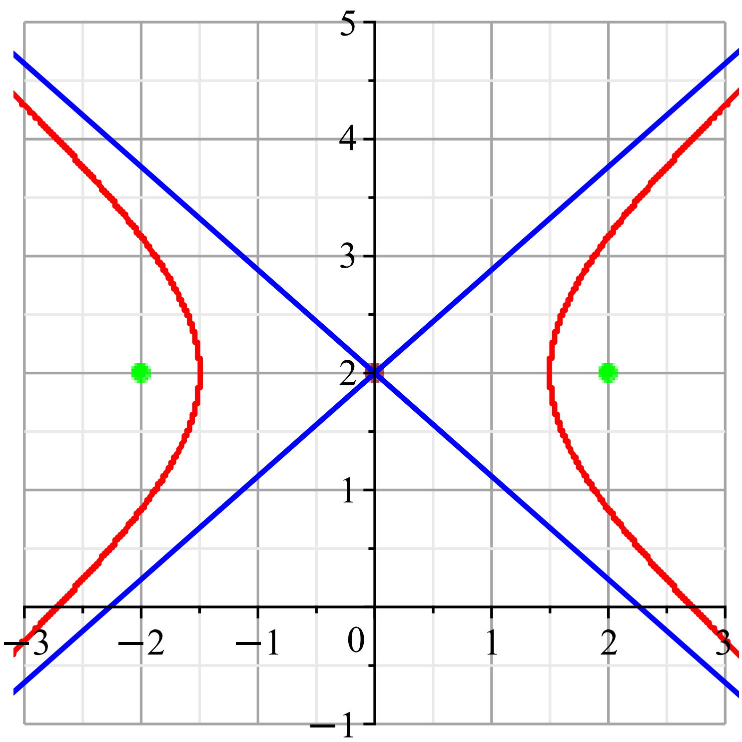
```
> point(F1, −2, 2) : point(F2, 2, 2) :
> hyperbola(H, [foci = [F1, F2], distancev = 3], [x, y]) :
> plt1 := draw(H, view = [−8..8, −6..8], axes = normal) :
```

Asymptotene til hyperbelen kan fåes ved *asymptotes*(H).

```
> plt2 := draw(asymptotes(H), color = blue) :
> display(plt1, plt2)
```



> $Hyperbel\left([-2, 2], [2, 2], a = \frac{3}{2} \right)$



$$-0.571\,(y-2.)^2+0.444\,x^2=1.$$
$$a=1.50,\;\; b=1.32,\;\; e=1.33,\;\; Sentrum=[0.,\,2.]$$
$$Brennpunkter\!:\; F_1=[-2.,\,2.],\; F_2=[2.,\,2.]$$
$$Styrelinjer\!:\; x_2=1.12,\; x_1=-1.12$$
$$Asymptoter\!:\; y_1=-0.882\,x+2.,\; y_2=0.882\,x+2.$$

>

Parabel

En parabel er en kurve som består av punkter (x, y) som ligger slik at avstandene til et gitt punkt og til en rett linje er like. Punktet kalles **brennpunktet** og linjen **styrelinje** eller direktrise.

- parabola(p, [*focus* = F, *vertex* = T], [x, y]) definerer en parabel p med brennpunkt i F og toppunkt i T. x og y er navnene på koordinataksene

  parabola(p, ligning, [x, y]) definerer en parabel p ved hjelp av *ligning* for parabelen

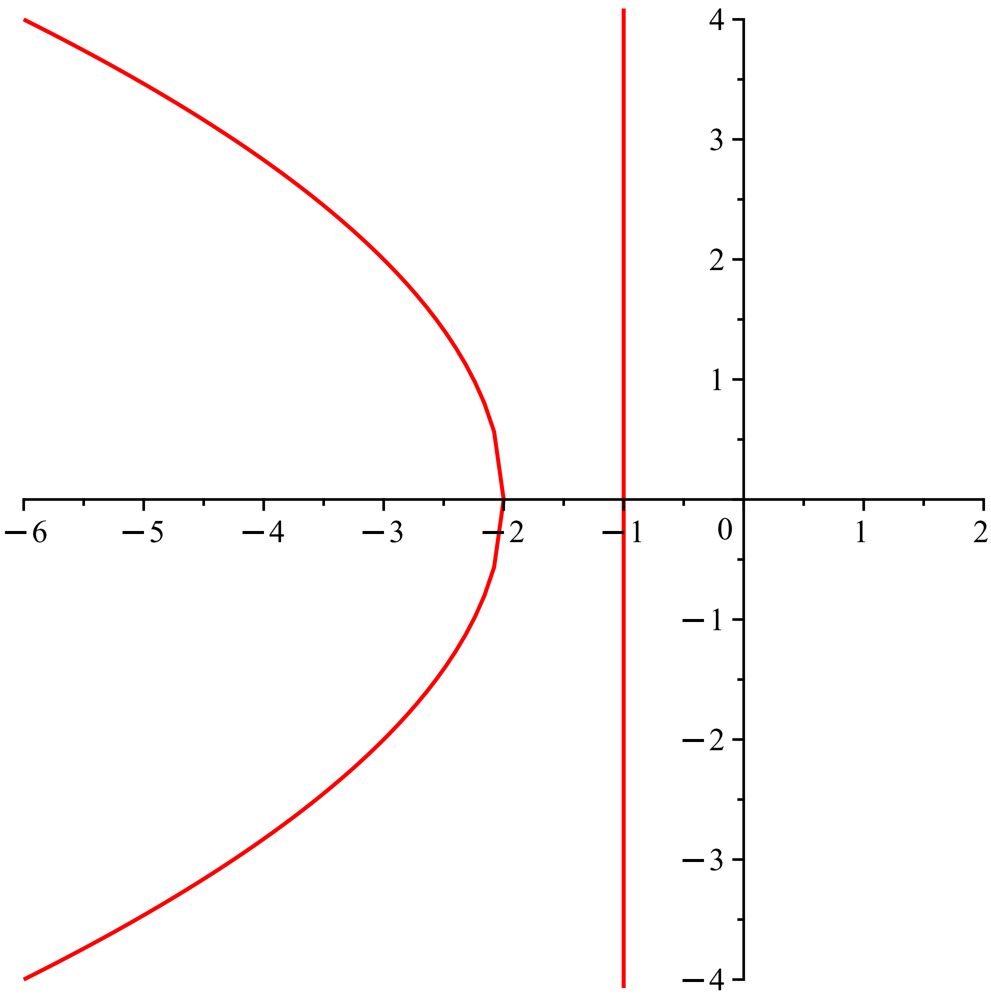
- Parabel i vgs-pakken

> $geometry\text{:-}point(F,\ -3, 0)$: $geometry\text{:-}point(T,\ -2, 0)$:

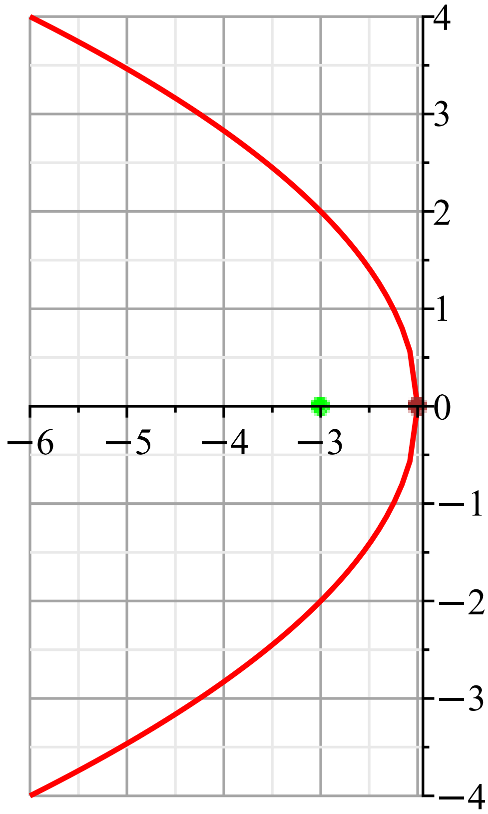
> $parabola(p,\ [focus=F,\ vertex=T],\ [x, y])$:

styrelinjen fåes ved *directrix*(p).

> $draw(\{p,\ directrix(p)\},\ view=[-6..2,\ -4..4],\ axes=normal,\ numpoints=100)$



> *Parabel*([−3, 0], [−2, 0])



$$-\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{2}x=1$$

Focus: $F=[-3., 0.]$

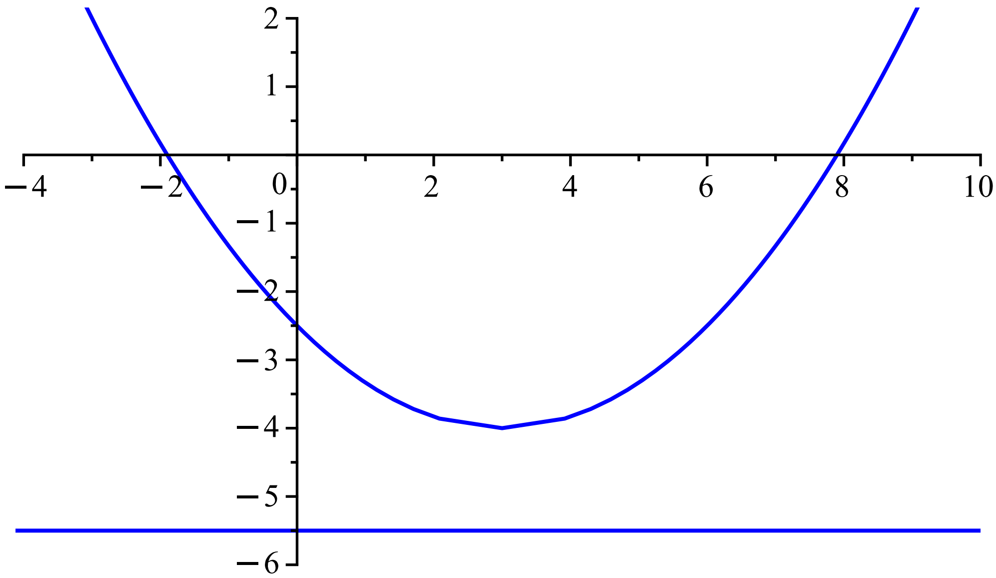
Vertex: $T=[-2., 0.]$

$> lign := (x-3)^2 = 6\,(y+4) : \%$

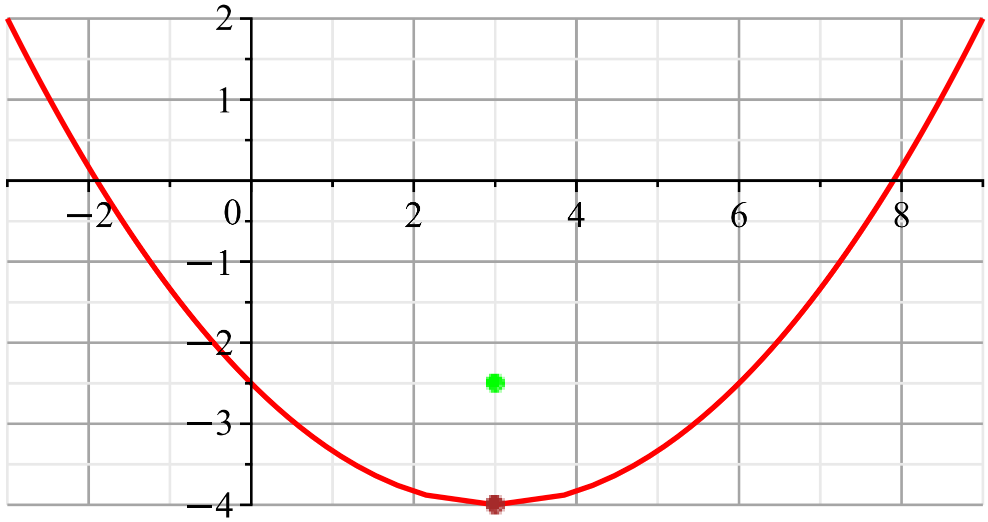
$$(x-3)^2 = 6\,y + 24$$

$> parabola(p, lign, [x, y]) :$

$> draw(\{p, directrix(p)\}, view = [-4..10, -6..2], axes = normal, numpoints = 100, color = blue)$



> *Parabel(lign)*



$$\frac{(x-3)^2-2}{6\,y+22}=1$$
$$Focus\colon\ F=[3.,\ -2.50]$$
$$Vertex\colon\ T=[3.,\ -4.]$$
$$Directrix\colon\ y=-5.500000000$$

>

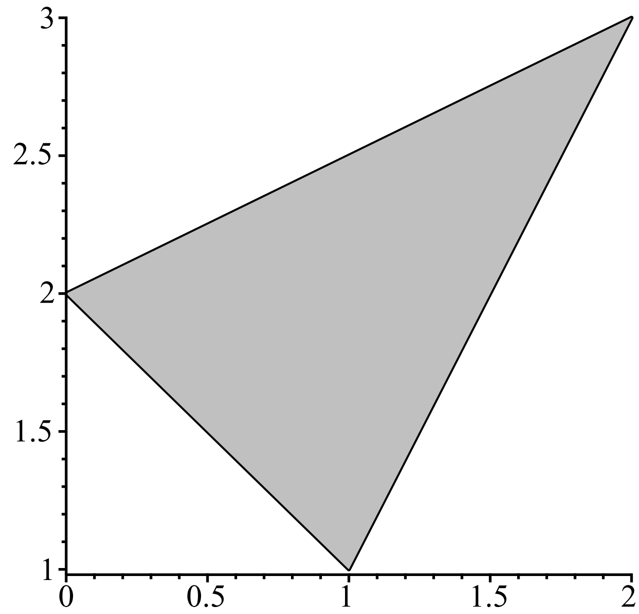
11.2 Symmetri om et punkt og en linje

- reflect($objekt$, P) speiler et grafisk objekt om et punkt $P=[x_0, y_0]$

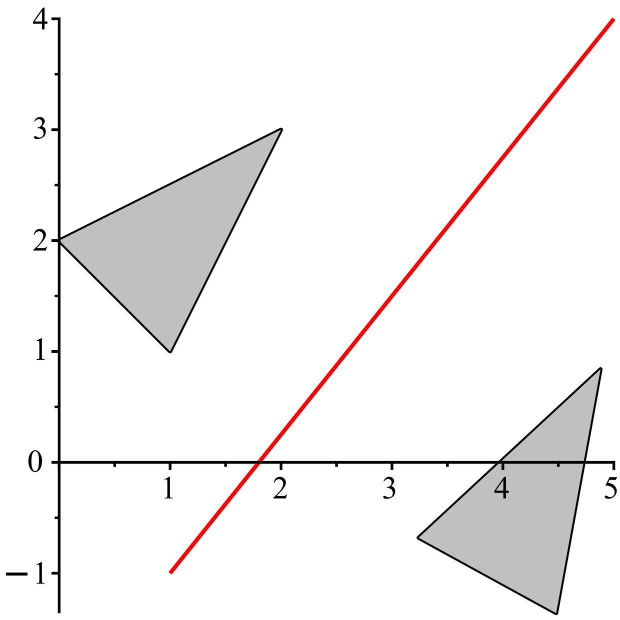
reflect($objekt$, $[P_1, P_2]$) speiler et grafisk objekt om en rett linje gitt ved to punkter $P_1=[x_1, y_1]$ og $P_2=[x_2, y_2]$

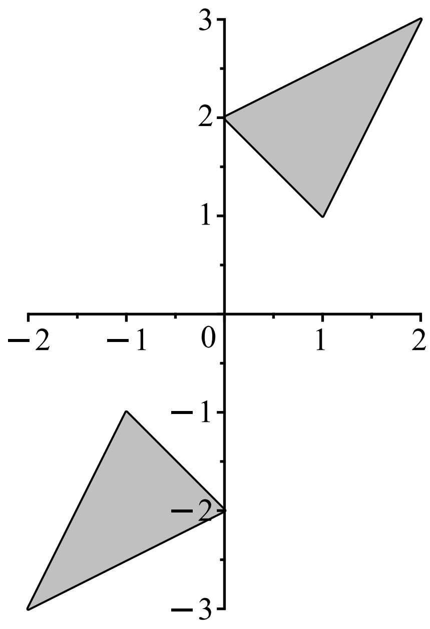
Tilsvarende for punkt og linje i rommet.

```
> T := polygonplot([[1, 1], [0, 2], [2, 3], [1, 1]], color = grey) :
  %
> SP := reflect(T, [0, 0]) :
> display(T, SP, scaling = constrained)
```

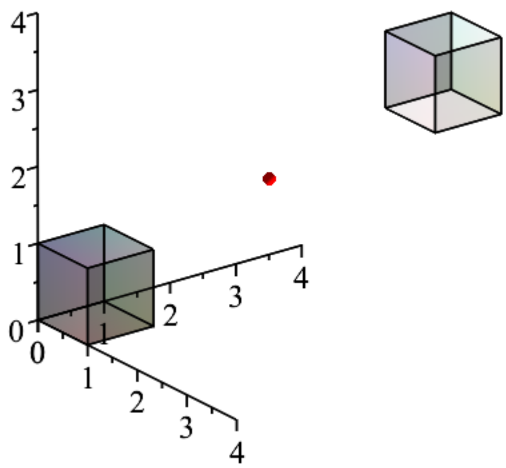


> *SL* := *reflect*(*T*, [[2, 0], [5, 4]]) :
> *L* := *plot*([[1, −1], [5, 4]], *color* = *red*) :
> *display*(*T*, *L*, *SL*, *scaling* = *constrained*)





> *C* := *plottools*[*cuboid*]([0, 0, 0], [1, 1, 1]) :
SP := *reflect*(*C*, [2, 2, 2]) :
P := *pointplot3d*([[2, 2, 2]], *symbol* = *solidsphere*, *color* = *red*, *symbolsize* = 20) :
display(*C*, *SP*, *P*, *axes* = *normal*, *orientation* = [−37, 68], *transparency* = 0.5)



11.3 Romgeometri

I programpakken geom3d finnes mange kommandoer for romgeometri. Her skal vi bare se på kommandoer for punkt, linje, plan og sammenligner med tilsvarende i vgs-pakken.

> *restart* : *with*(*geom3d*) :

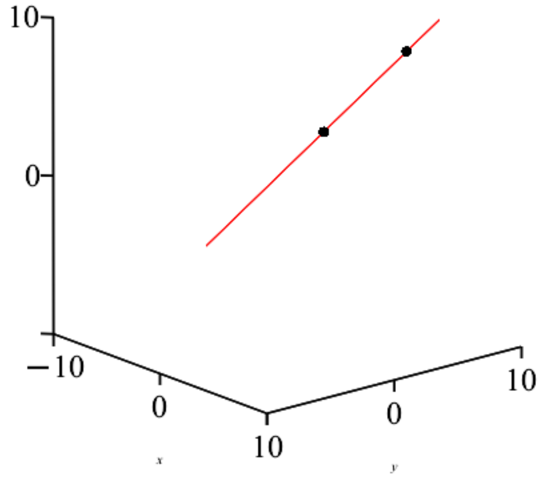
- draw(*objekt*) plotter et geometrisk *objekt*
- point(A, $[x, y, z]$) definerer punktet A med koordinatene x, y, z
- line(L, $[A, B]$) definerer linjen L som går gjennom punktene A og B
- plane(p, $[A, B, C]$) definerer planet gjennom punktene A, B og C
- Se RettLinje, Plan

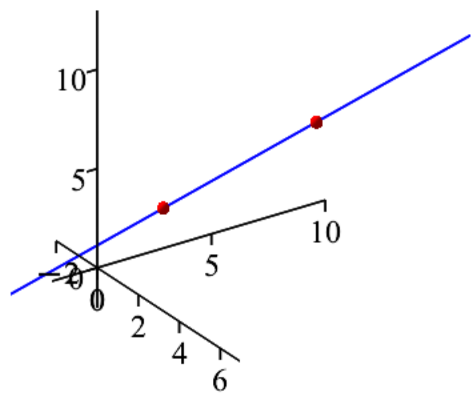
> $point(A, [1, 2, 3])$:
> $point(B, [4, 6, 8])$:
> $P := pointplot3d([[1, 2, 3], [4, 6, 8]], symbol = solidsphere, symbolsize = 16, color = black)$:
> $line(L1, [A, B])$:
> $p := draw(L1, color = red, axes = frame, orientation = [-40, 72], labels = [x, y, z], tickmarks = [3, 3, 3])$:

> $k1 := display(p, P, view = [-10..10, -10..10, -10..10])$: %

> $RettLinje([1, 2, 3], [4, 6, 8], t = -1..2)$

$$x = 3t + 1, y = 4t + 2, z = 5t + 3$$





$point(C, [8, 9, 10])$:

$plt1 := draw(p1, color = red, style = patchnogrid, axes = frame, orientation = [-34, 72])$

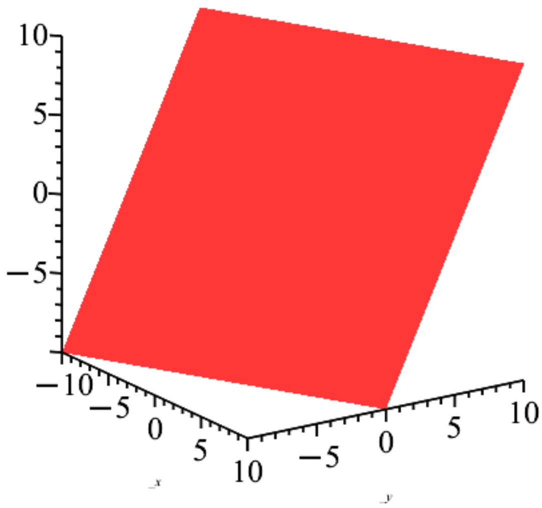
Planet gjennom punktene A, B og C finnes nå ved

$plane(p1, [A, B, C])$:

$Plan([[1, 2, 3], [4, 6, 8], [8, 9, 10]], p, color = red)$

$$x - 2y + z = 0$$

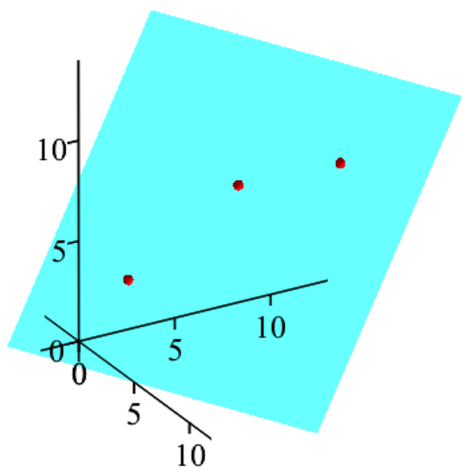
p



restart :

A, *B*, *C*, D, *E* := [1, 2, 3], [4, 6, 8], [8, 9, 10], [1, −2, 3], [4, 6, −8] :

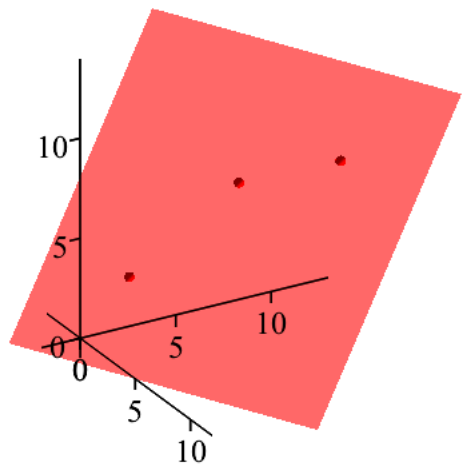
p



Skjæringslinjen mellom disse planene får vi nå ved

SkjæringPlanPlan(α, β)

$$\left[x=-\frac{3\,t}{11}+\frac{20}{11},\, y=\frac{4\,t}{11}+\frac{10}{11},\, z=t\right]$$



Nå finner vi planene gjennom *A*, *B*, *C* og *A*, *D*, *E*

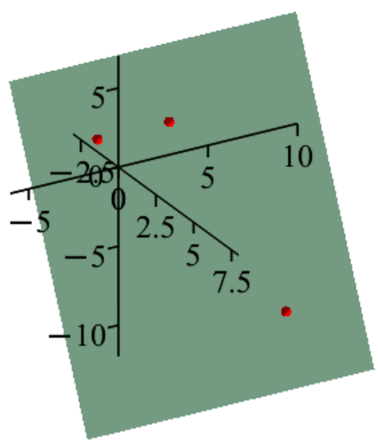
α := *Plan*([*A*, *B*, *C*], *p*, *color* = *cyan*)

$$\alpha := x-2\,y+z=0$$

β := *Plan*([*A*, D, *E*], *q*, *color* = *aquamarine*)

$$\beta := -11\,x+20-3\,z=0$$

q



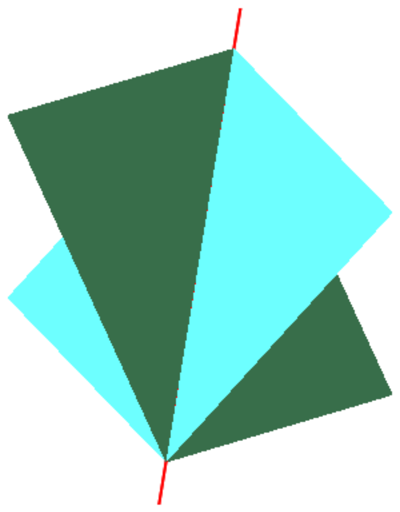
Vinkelen mellom planene er

ϕ = *VinkelPlanPlan*(α, β)

$$\phi = 59.91525241$$

La oss finne vinkelen mellom linjene AB og CD.

A, *B*



$[1, 2, 3], [4, 6, 8]$

C, D

$[8, 9, 10], [1, -2, 3]$

$AB := RettLinje(A, B, t = -1..2):$

$x = 3\,t + 1, y = 4\,t + 2, z = 5\,t + 3$

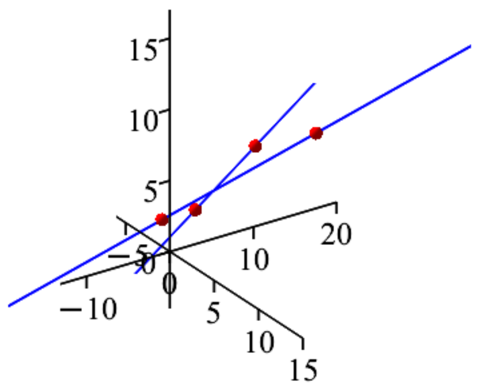
$pltAB := \%:$

$CD := RettLinje(C, \mathrm{D}, t = -1..2):$

$x = -7\,t + 8, y = -11\,t + 9, z = -7\,t + 10$

$pltCD := \%:$

$display(pltAB, pltCD)$



Vinklene mellom linjene *AB* og *CD* er

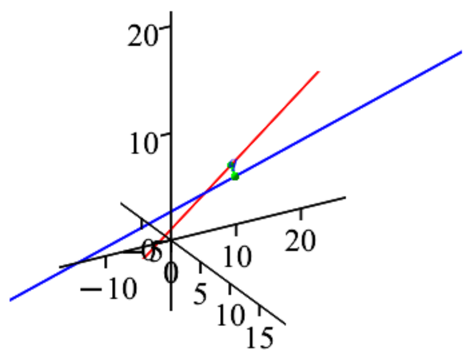
$VinkelLinjeLinje([A, B], [C, \mathrm{D}])$

17.13038111

Avstanden mellom linjene er

$AvstandLinjeLinje([A, B], [C, \mathrm{D}])$

$q = 1.81688$



> $restart:$

Eksempel 11.3.1

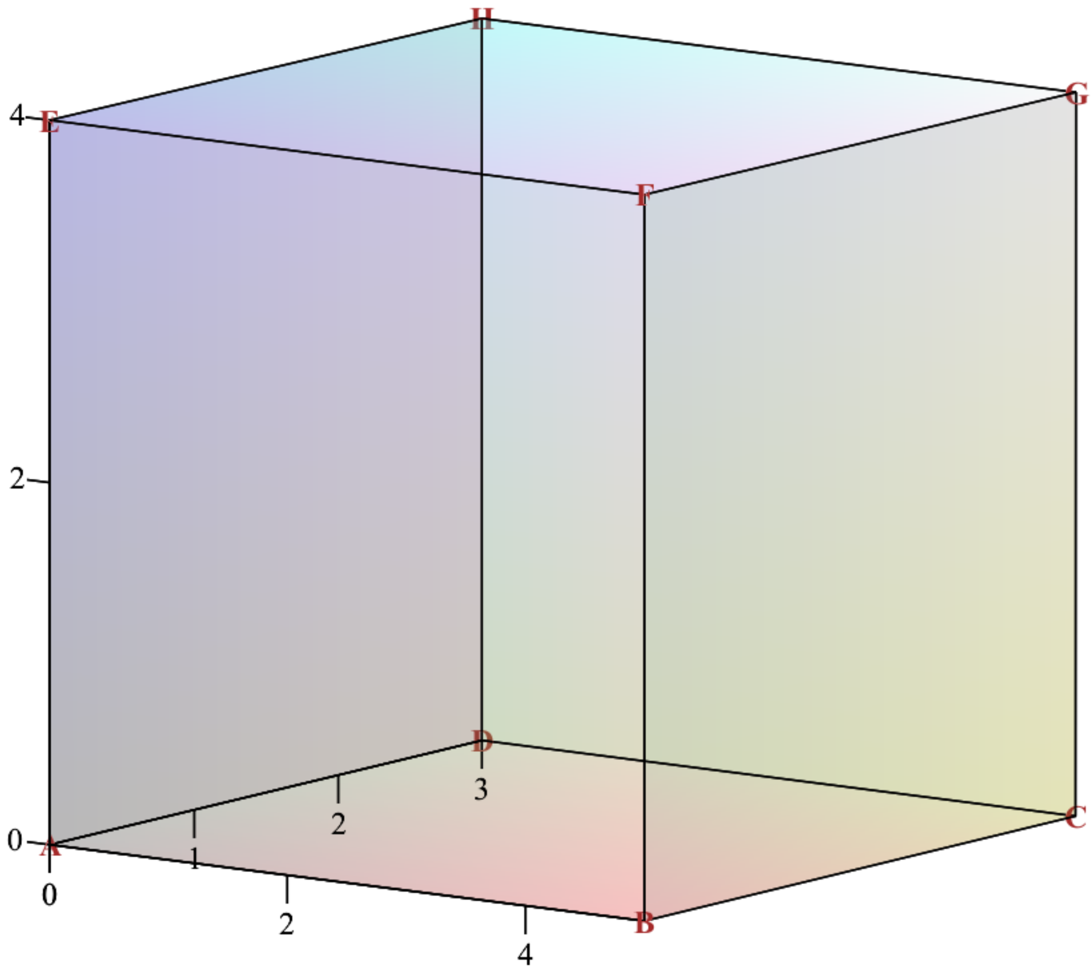
> $plt1 := cuboid([0, 0, 0], [5, 3, 4]):$

> $A := [0, 0, 0]: B := [5, 0, 0]: C := [5, 3, 0]: \mathrm{D} := [0, 3, 0]: E := [0, 0, 4]:$
> $F := [5, 0, 4]: G := [5, 3, 4]: H := [0, 3, 4]:$

> $plt2 := textplot3d([[op(A), \text{"A"}], [op(B), \text{"B"}], [op(C), \text{"C"}], [op(\mathrm{D}), \text{"D"}], [op(E), \text{"E"}],$
> $[op(F), \text{"F"}], [op(G), \text{"G"}], [op(H), \text{"H"}]], font = [times, bold, 24], color = brown):$

$> plt := display(plt1, plt2, axes = normal, orientation = [-54, 80], tickmarks = [3, 3, 3], transparency = 0.8) :$

$\%$



a) Regn ut lengdene av sidene AC, AG og DG

b) Regn ut vinkelen mellom linjene AG og AD

Løsning

$> A, C$

$$[0, 0, 0], [5, 3, 0]$$

$> RettLinje(A, C, t = 0..1) :$

$$x = 5\,t, y = 3\,t, z = 0$$

$> display(\%, plt)$

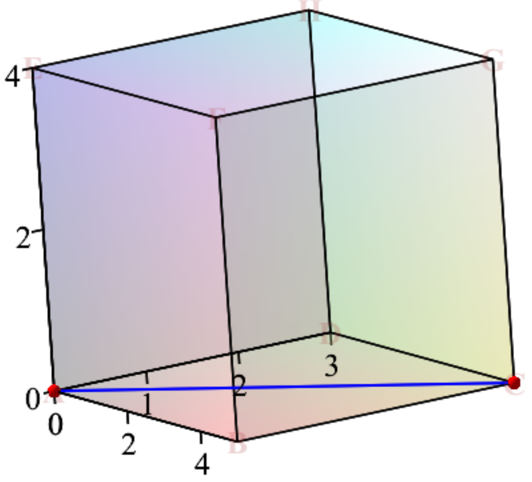
$> A, G$

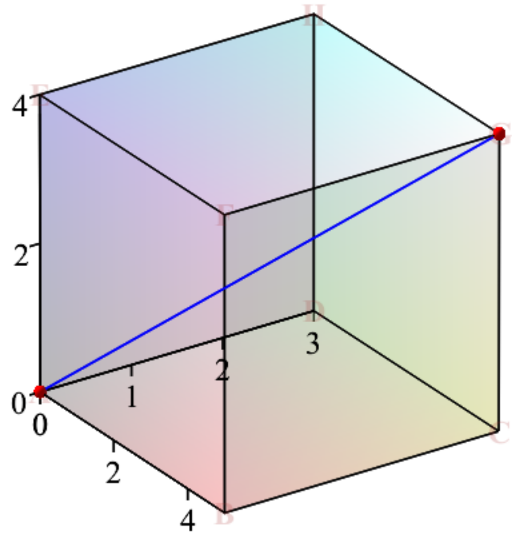
$$[0, 0, 0], [5, 3, 4]$$

$> RettLinje(A, G, t = 0..1) :$

$$x = 5\,t, y = 3\,t, z = 4\,t$$

$> display(\%, plt)$





$AC := C - A$

$$AC := [5, 3, 0]$$

$Lengde(AC)$

$$\sqrt{34}$$

$AG := G - A$

$$AG := [5, 3, 4]$$

$Lengde(AG)$

$$5\sqrt{2}$$

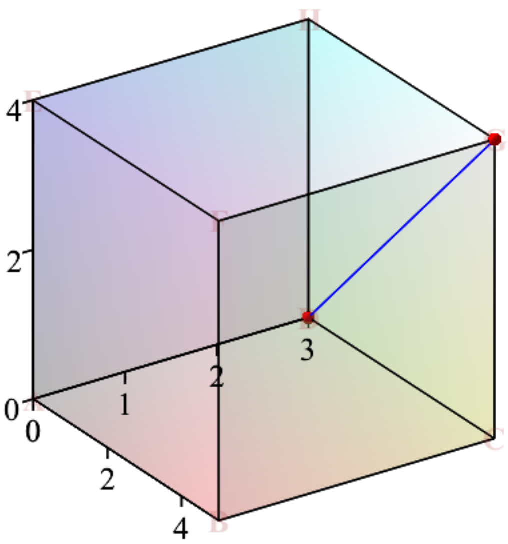
D, G

$$[0, 3, 0], [5, 3, 4]$$

$RettLinje(\mathrm{D}, G, t = 0..1)$:

$$x = 5\,t, y = 3, z = 4\,t$$

$display(\%, plt)$



$DG := G - \mathrm{D}$

$$DG := [5, 0, 4]$$

> $Lengde(DG)$

$$\sqrt{41}$$

>